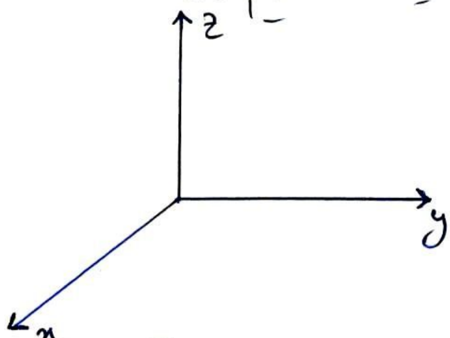
بسمه تعالی

فصل اول : مروری بر مفاهیم بردار، خط و صفحه در فضا

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

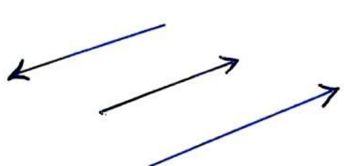
هر سه تایی مرتب $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ یک نقطه در $\mathbb{R}^3$ نامیده می‌شود. x ، y ، z را به ترتیب طول، عرض و ارتفاع P می‌نامیم. برای نمایش $\mathbb{R}^3$ از سه محور دو به دو عمود بر هم به شکل زیر استفاده می‌کنیم و آن‌ها را محورهای مختصات می‌نامیم. محل برخورد این سه نقطه مبدأ مختصات یعنی نقطه $(0,0,0)$ است.



منظور از یک بردار در $\mathbb{R}^3$ یک پاره خط جهت‌دار است. بردارها را با یک پیکان نمایش می‌دهیم. نقطه آغاز این پیکان را ابتدا و نقطه پایان آن را انتهای بردار می‌نامیم. بردارها را با حروف کوچک انگلیسی مانند $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، ... نمایش می‌دهیم.

اگر $\vec{a}$ یک بردار باشد، اندازه پاره خط متناظر با آن را اندازه $\vec{a}$ نامیده و با $\|\vec{a}\|$ نمایش می‌دهیم. بردار با اندازه 1 را بردار یکه و بردار با اندازه صفر را بردار صفر $(\vec{0})$ می‌نامیم.

هر بردار $\vec{a}$ در $\mathbb{R}^3$ را می‌توان با یک سه تایی مرتب مانند (a_1,a_2,a_3) نمایش داد. اگر ابتدای این بردار را از مبدأ رسم کنیم، (a_1,a_2,a_3) همان مختصات نقطه انتهای بردار است. اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ آنگاه $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. دو بردار ناصفر را با هم موازی می‌نامیم هرگاه راستای یکسانی داشته باشند.

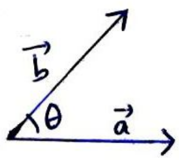


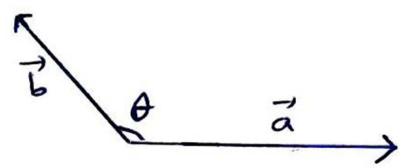
بردارهای روبه‌رو همگی با هم موازی هستند.

بردارهای $\vec{i}=(1,0,0)$ ، $\vec{j}=(0,1,0)$ و $\vec{k}=(0,0,1)$ بردارهای یکه استاندارد نامیده می‌شوند.

اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ یک بردار باشد آنگاه $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$.

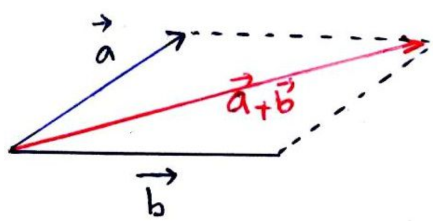
فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشند که از یک مبدأ مشترک رسم شده‌اند. زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ زاویه‌ای همچون θ بین راستاهای آنهاست که $0 \leq \theta \leq \pi$.

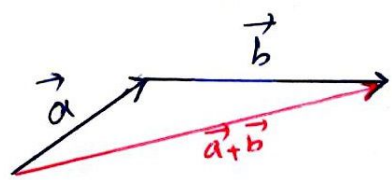




اعمال جبری روی بردارها

فرض کنید $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در فضا باشند. بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را به شکل $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ تعریف می‌کنیم.





قضیه. اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار در فضا باشند، آنگاه

۱) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

۲) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

۳) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

۴) $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$

فرض کنید $\vec{a}$ یک بردار و λ عددی حقیقی باشد. حاصل ضرب اسکالر λ در $\vec{a}$ به شکل $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ تعریف می‌شود.

توجه کنید که $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\|\vec{a}\|$. اگر $\lambda \neq 0$، $\vec{a} \neq \vec{0}$، بردار $\lambda\vec{a}$ هم‌راستا با $\vec{a}$ است. اگر $\lambda > 0$، $\lambda\vec{a}$ هم‌جهت با $\vec{a}$، اگر $\lambda < 0$، $\lambda\vec{a}$ در خلاف جهت $\vec{a}$ است.

گزاره. فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ دو بردار، α، β دو اسکالر باشند.

۱) $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

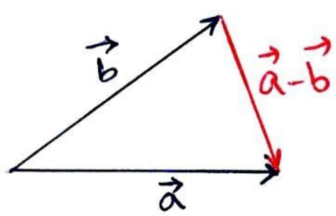
۲) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

۳) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

۴) اگر $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$، آنگاه $\vec{a} \parallel \vec{b}$ اگر و تنها اگر اسکالر ناصفر λ وجود داشته باشد که $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

تعریف. فرض کنید $\vec{a}$ یک بردار باشد. بردار $(-1)\vec{a}$ را قرینه $\vec{a}$ نامیده و با $-\vec{a}$ نمایش می‌دهیم.

همچنین اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ دو بردار باشند، تفاضل $\vec{b}$ از $\vec{a}$ که با $\vec{a}-\vec{b}$ نمایش داده می‌شود را به شکل $\vec{a}+(-\vec{b})$ تعریف می‌کنیم.



ضرب داخلی و خارجی بردارها

فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ دو بردار ناصفر در فضا، و θ زاویه بین آنها باشد. ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نمایش داده می‌شود به شکل $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$ تعریف می‌شود. اگر $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ صفر باشند قرار می‌دهیم $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

می‌توان نشان داد اگر $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ آنگاه $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

تعریف. دو بردار را هم عمود می‌نامیم هرگاه ضرب داخلی آنها صفر باشد.

با تعریف فوق، بردار صفر بر همه بردارها عمود است.

گزاره. فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار و α و β دو اسکالر باشند. در این صورت

۱) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^{۲}$

۲) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

۳) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

۴) $(\alpha\vec{a})\cdot(\beta\vec{b})=\alpha\beta(\vec{a}\cdot\vec{b})$

۵) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$

مثال. فرض کنید $\vec{a}=(۱,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۲,۱,۱)$. زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

مثال. فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و θ زاویه بین آنها باشد. اگر $\|\vec{a}\|=۳$ ، $\|\vec{b}\|=۴$ و $\theta=\frac{\pi}{۳}$

مطلوبست $\|۲\vec{a}-۳\vec{b}\|$.

مثال. فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای یکه هستند و $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{۳}$. مقدار $(۲\vec{a}+۵\vec{b})\cdot(۳\vec{a}-۴\vec{b})$ را بیابید.

تعریف. اگر $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یک ماتریس ۳×۳ باشد، دترمینان A به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\det A=|A|=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$=a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

روش ساروس:
$$\begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix} \rightsquigarrow aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$$

تعریف. فرض کنید $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\vec{a}\times\vec{b}=\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

اگر θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است که بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود بوده و اندازه آن $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$ است و جهت آن با قاعده دست راست مشخص می‌شود. بدین معنی که اگر انگشت اشاره دست راست در جهت $\vec{a}$ و انگشت میانی در جهت $\vec{b}$ قرار گیرد، آنگاه انگشت شست در جهت $\vec{a}\times\vec{b}$ است.

نکته. $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ ، $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

گزاره. فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ سه بردار در فضا و λ، μ دو اسکالر باشند. در این صورت

۱) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

۲) $(\lambda\vec{a})\times(\mu\vec{b})=(\lambda\mu)\vec{a}\times\vec{b}$

۳) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

۴) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$

۵) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ناصفر باشند، آنگاه $\vec{a}\parallel\vec{b}$ اگر و تنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

نکته. مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$.

مثال. فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار با اندازه های ۳ و ۵ بوده و زاویه بین آنها $\frac{\pi}{4}$ است. مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده بر بردارهای $2\vec{a}+\vec{b}$ و $3\vec{a}-\vec{b}$ را بیابید.

مثال. فرض کنید $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(-1,1,-1)$. بردار یکه عمود بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

خط در فضا

فرض کنید $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ یک نقطه و $\vec{v}=(a,b,c)$ یک بردار ناصفر در فضا باشد. منظور از خط گذرا از P_0 و همراستا با $\vec{v}$ عبارت است از مکان هندسی نقاطی مانند $P=(x,y,z)$ در فضا که $P=P_0$ یا بردار $\overrightarrow{P_0P}$ با $\vec{v}$ موازی است. بردار $\vec{v}$ بردار هادی این خط نامیده می‌شود. اگر این خط را l بنامیم آنگاه

$$l:\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$ معادلات پارامتری l

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \quad (a,b,c\neq 0)$$ معادلات متقارن l

$$x=x_0,\quad \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \quad (a=0,\ b,c\neq 0)$$ 〃 〃 〃

$$x=x_0,\quad y=y_0 \quad (a=b=0,\ c\neq 0)$$ 〃 〃 〃

نکته. دو خط در فضا باهم موازی هستند، اگر تنها اگر بردارهای هادی آنها موازی باشند.

مثال. معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $P_0=(1,2,3)$ و $P_1=(2,0,1)$ بگذرد.

مثال. معادله خط را بنویسید که از نقطه $P=(-1,2,0)$ بگذرد و با خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$ موازی باشد.

مثال. معادله پاره خط واصل دو نقطه $(1,-2,0)$ و $(3,-1,4)$ را بنویسید.

صفحه در فضا

فرض کنید $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ یک نقطه و $\vec{n}=(a,b,c)$ یک بردار ناصفر در فضا باشد. صفحه π گذرا از P_0 و عمود بر $\vec{n}$ برابر است با مکان هندسی نقاطی از فضا مانند P که $\overrightarrow{P_0P}$ بر $\vec{n}$ عمود است. بنابراین

$$\pi:\ ax+by+cz=d \qquad (d=ax_0+by_0+cz_0)$$

مثال. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $P=(1,-1,2)$ بگذرد و بر بردار $\vec{n}=(1,2,-1)$ عمود باشد.

مثال. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقاط $A=(1,1,2)$ ، $B=(0,-1,1)$ و $C=(2,1,0)$ بگذرد.

مثال. معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A=(1,0,-1)$ گذشته و با صفحه‌های $2x-y+z=1$ و $-x+y+3z=2$ موازی باشد.

مثال. معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط زیر باشد.

$$l: x=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}\ , \qquad l': x+1=\frac{y+2}{2}=z+1$$

مثال. معادله خطی را بنویسید که متعلق به صفحه $x+2y-z=4$ باشد و بر خط $\frac{1-x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{3-2z}{4}$ عمود باشد.

فصل دوم: توابع برداری

فرض کنید I یک زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی باشد. یک تابع برداری روی I قاعده‌ای است که به هر $t\in I$ دقیقاً یک بردار $\vec{f}(t)$ در صفحه (یا فضا) نسبت می‌دهد. در این حالت می‌گوییم $\vec{f}: I \to \mathbb{R}^2$ ($\vec{f}: I \to \mathbb{R}^3$) یک تابع برداری است.

به عنوان مثال $\vec{f}(t)=(t, t^2+1, e^t)$ یک تابع برداری در فضاست. خروجی این تابع به ازای $t=0$ بردار $(0,1,1)$ و به ازای $t=1$ بردار $(1,2,e)$ است.

در حالت کلی هر تابع برداری در صفحه به شکل $\vec{f}(t)=(x(t),y(t))$ و هر تابع برداری در فضا به شکل $\vec{f}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ است.

از نظر فیزیکی، تابع $\vec{f}(t)$ را می‌توان به عنوان تابع مکان یک ذره متحرک در نظر گرفت که نشان می‌دهد متحرک در لحظه t_0 در نقطه $f(t_0)$ قرار دارد. توجه کنید که به ازای هر t_0، $\vec{f}(t_0)$ یک بردار است. اگر این بردار را از مبدأ رسم کنیم مکان هندسی نقاط انتهایی $\vec{f}(t_0)$ یک خم (منحنی) در فضا (صفحه) می‌دهد که خم پارامتری نظیر $\vec{f}(t)$ نامیده می‌شود.

یادآوری. معادله بیضی به مرکز (x_0, y_0) در صفحه و به شعاع های a, b به شکل زیر است:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

مثال. خم پارامتری نظیر توابع برداری زیر را رسم کنید:

۱) $\vec{f}(t)=(2,t)$

۲) $\vec{g}(t)=(\cos t+1, 2\sin t)$

۳) $\vec{h}(t)=(\cosh t, \sinh t)$

در مثال های فوق دیدیم که با داشتن هر تابع برداری می توان خم پارامتری نظیرآن را یافت. برعکس، اگر C یک خم در صفحه یا فضا باشد می توان تابع برداری $\vec{f}(t)$ را طوری یافت که C خم پارامتری نظیرآن باشد. در این صورت می گوییم C را به شکل پارامتری نوشته ایم.

مثال. هر یک از خم های زیر را به شکل پارامتری بنویسید:

۱) بیضی $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

۲) نیمه سمت راست بیضی (۱)

۳) پاره خط واصل $A=(1,-1,0)$ به $B=(2,3,-2)$.

۴) نمودار تابع $y=g(x)$ در صفحه

۵) نمودار تابع $x=h(y)$ در صفحه.

تعریف. فرض کنید $\vec{f},\vec{g}: I \to \mathbb{R}^3$ دو تابع برداری و $\alpha: I \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی (اسکالر) باشد. توابع $\vec{f}\pm\vec{g}$ ، $\alpha\vec{f}$ ، $\vec{f}\cdot\vec{g}$ ، $\vec{f}\times\vec{g}$ به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\begin{cases} \vec{f}\pm\vec{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{f}\pm\vec{g})(t) = \vec{f}(t) \pm \vec{g}(t) \end{cases}$$ تابع برداری

$$\begin{cases} \alpha\vec{f} : I \to \mathbb{R}^3 \\ (\alpha\vec{f})(t) = \alpha(t)\,\vec{f}(t) \end{cases}$$ تابع برداری

$$\begin{cases} \vec{f}\cdot\vec{g} : I \to \mathbb{R} \\ (\vec{f}\cdot\vec{g})(t) = \vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t) \end{cases}$$ تابع اسکالر

$$\begin{cases} \vec{f}\times\vec{g} : I \to \mathbb{R}^3 \\ (\vec{f}\times\vec{g})(t) = \vec{f}(t)\times\vec{g}(t) \end{cases}$$ تابع برداری

حد و پیوستگی

فرض کنید تابع برداری $\vec{f}$ در یک همسایگی محذوف نقطه t_0 تعریف شده است. می‌گوییم $\vec{f}$ در t_0 حدی برابر $\vec{v}$ دارد هرگاه با نزدیک شدن t به t_0، بردار $\overrightarrow{f(t)}$ به $\vec{v}$ نزدیک شود. در این حالت می‌نویسیم $\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{f(t)}=\vec{v}$.

قضیه. فرض کنید $\overrightarrow{f(t)}=(x(t),y(t),z(t))$ یک تابع برداری باشد که در یک همسایگی محذوف نقطه t_0 تعریف شده است. در این صورت $\vec{f}$ در t_0 حد دارد اگر و تنها اگر هر سه تابع $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ در t_0 حد داشته باشند. در این صورت

$$\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{f(t)}=\left(\lim_{t\to t_0}x(t),\ \lim_{t\to t_0}y(t),\ \lim_{t\to t_0}z(t)\right).$$

نتیجه. فرض کنید $\overrightarrow{f(t)}$ و $\overrightarrow{g(t)}$ دو تابع برداری و $\alpha(t)$ یک تابع حقیقی باشد که در یک همسایگی محذوف t_0 تعریف شده و در آن حد دارند. در این صورت

۱) $\lim_{t\to t_0}(\vec{f}\pm\vec{g})(t)=\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{f(t)}\pm\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{g(t)}$

۲) $\lim_{t\to t_0}(\alpha\vec{f})(t)=\lim_{t\to t_0}\alpha(t)\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{f(t)}$

۳) $\lim_{t\to t_0}(\vec{f}\cdot\vec{g})(t)=\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{f(t)}\cdot\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{g(t)}$

۴) $\lim_{t\to t_0}(\vec{f}\times\vec{g})(t)=\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{f(t)}\times\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{g(t)}$

۵) $\lim_{t\to t_0}\|\overrightarrow{f(t)}\|=\|\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{f(t)}\|$

مثال. فرض کنید $\overrightarrow{f(t)}=(\cos t,\frac{\sin t}{t},e^t)$. مطلوب است $\lim_{t\to 0}\overrightarrow{f(t)}$.

تعریف. فرض کنید تابع برداری $\overrightarrow{f(t)}$ در یک همسایگی نقطه t_0 تعریف شده است. می‌گوییم $\vec{f}$ در t_0 پیوسته است هرگاه $\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{f(t)}=\overrightarrow{f(t_0)}$.

واضح است که $\vec{f}$ در t_0 پیوسته است اگر و تنها اگر تمام مولفه‌های آن در t_0 پیوسته باشند.

مشتق توابع برداری

فرض کنید تابع برداری $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ در یک همسایگی از نقطه t_0 تعریف شده است. می‌گوییم $\vec{f}$ در t_0 مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر وجود داشته باشد.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t-t_0}(\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)) = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}, \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}, \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0} \right)$$

اگر حد فوق برابر $\vec{v}$ باشد، آنگاه می‌نویسیم $\vec{f'}(t_0) = \vec{v}$.

قضیه. تابع برداری $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ در t_0 مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر هر یک از توابع حقیقی $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ در t_0 مشتق‌پذیر باشند. در این صورت $\vec{f'}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

نتیجه. اگر توابع برداری $\vec{f}$، $\vec{g}$ و تابع حقیقی α در t_0 مشتق‌پذیر باشند، آنگاه توابع $\alpha\vec{f}$، $\vec{f}.\vec{g}$ و $\vec{f}\times\vec{g}$ نیز در t_0 مشتق‌پذیرند و

1) $(\alpha \vec{f})'(t_0) = \alpha'(t_0)\vec{f}(t_0) + \alpha(t_0)\vec{f'}(t_0)$

2) $(\vec{f}.\vec{g})'(t_0) = \vec{f'}(t_0).\vec{g}(t_0) + \vec{f}(t_0).\vec{g'}(t_0)$

3) $(\vec{f}\times\vec{g})'(t_0) = \vec{f'}(t_0)\times\vec{g}(t_0) + \vec{f}(t_0)\times\vec{g'}(t_0)$

مثال. فرض کنید $\vec{f}: I \to \mathbb{R}^3$ یک تابع مشتق‌پذیر بر I است. نشان دهید $\vec{f}$ تابع ثابت است اگر و تنها اگر برای هر $t \in I$، $\vec{f'}(t) = \vec{0}$.

مثال. فرض کنید $\vec{f}(t)$ یک تابع برداری و c عددی حقیقی است. اگر برای هر t، $\|\vec{f}(t)\| = c$، نشان دهید برای هر t، بردارهای $\vec{f}(t)$ و $\vec{f'}(t)$ بر هم عمودند.

خم های پارامتری

از این به بعد اگر $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ یک تابع برداری و C خم تصویر آن باشد، می‌نویسیم $C:\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ یک خم پارامتری است.

نکته. اگر $\vec{r}'(t)$ وجود داشته باشد، برای هر t، $\vec{r}'(t)$ بر خم C مماس است.

بنابراین برای نوشتن معادله خط مماس بر C در یک نقطه می‌توان از $\vec{r}'(t)$ به عنوان بردار هادی استفاده کرد.

مثال. خم پارامتری $C:\vec{r}(t)=(t^2+t,\sin t,e^t)$ مفروض است. معادله خط مماس بر C را در نقطه $(0,0,1)$ بنویسید.

تعریف. خم پارامتری $C:\vec{r}(t) \quad (t\in I)$ را یک خم هموار بر بازه I می‌نامیم هرگاه برای هر $t\in I$، $\vec{r}'(t)$ موجود، پیوسته و ناصفر باشد.

مختصات فرنه

فرض کنید $C:\vec{r}(t)$ یک خم پارامتری هموار بر بازه I باشد. برای هر $t\in I$، بردار یکه مماس بر C در نقطه نظیر t با $\vec{T}(t)$ نمایش داده شده و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

هم‌چنین اگر $\vec{T}'(t)$ موجود و ناصفر باشد، بردار یکه قائم اصلی بر C در نقطه نظیر t به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$$

به علاوه، بردار یکه قائم دوم در نقطه نظیر t به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$$

سه تایی $(\vec{T}(t),\vec{N}(t),\vec{B}(t))$ را دستگاه مختصات فرنه C در نقطه نظیر t می‌نامیم.

مثال. خم $C: \vec{r(t)} = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ مفروض است. دستگاه مختصات فرنه این خم را در نقطه $P = (1, 0, 1)$ بنویسید.

روش دیگر محاسبه مختصات فرنه:

$$\vec{T(t)} = \frac{\vec{r'(t)}}{\|\vec{r'(t)}\|}, \qquad \vec{B(t)} = \frac{\vec{r'(t)} \times \vec{r''(t)}}{\|\vec{r'(t)} \times \vec{r''(t)}\|}, \qquad \vec{N(t)} = \vec{B(t)} \times \vec{T(t)}$$

مثال. خم پارامتری $C: \vec{r(t)} = (t^2 + t, \cos t - t, e^t + \ln(t+1))$ مفروض است. دستگاه مختصات فرنه این خم را در نقطه نظیر $t = 0$ بنویسید.

تعریف. فرض کنید C یک خم پارامتری و P_0 نقطه ای واقع بر C نظیر t_0 باشد. صفحه گذرا از P_0 و عمود بر $\vec{T(t_0)}$ را صفحه قائم بر C در P_0 می نامیم. همچنین صفحه گذرا از P_0 و عمود بر $\vec{B(t_0)}$ را صفحه بوسان C در P_0 می نامیم.

مثال. معادله صفحه قائم و بوسان خم C در مثال قبل را در نقطه $P = (0, 1, 1)$ بنویسید.

خم های مسطح

خم C را یک خم مسطح می نامیم هرگاه صفحه ای مانند π وجود داشته باشد که C در صفحه π قرار بگیرد.

گزاره. خم $C: \vec{r(t)}$ یک خم مسطح است اگر و تنها اگر بردار ثابت $\vec{v}$ و تابع اسکالر $\alpha(t)$ وجود داشته باشد که برای هر t،

$$\vec{r'(t)} \times \vec{r''(t)} = \alpha(t)\, \vec{v}.$$

مثال. نشان دهید خم $C: \vec{r(t)} = (\cos t - t, t + 1, t + 2\cos t)$ مسطح است.

نکته. اگر C یک خم مسطح باشد، بردار $\vec{B(t)}$ ثابت است و برعکس.

نکته. اگر C یک خم مسطح باشد، نقطه $P_0 \in C$ وجود دارد که خم C در صفحه بوسان خم در نقطه P_0 قرار می گیرد.

مثال. نشان دهید خم $C: \vec{r(t)} = (t^3 + t, t + 1, t + 2t^3)$ مسطح است.

تابع طول قوس و خمیدگی

فرض کنید $C:\vec{r(t)}$ یک خم هموار بر بازه I باشد و $t_0 \in I$. تابع طول قوس C از نقطه نظیر t_0 به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\vec{r'(u)}\|\,du$$

هم‌چنین طول قوس خم C از نقطه نظیر a تا b برابر است با

$$s=\int_{a}^{b}\|\vec{r'(t)}\|\,dt$$

مثال. تابع طول قوس خم $C:\vec{r(t)}=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$ را از نقطه نظیر $t=0$ محاسبه کنید.

فرض کنید $C:\vec{r(t)}=(x(t),y(t),z(t))$ یک خم پارامتری هموار است. با توجه به اینکه $s'(t)=\|\vec{r'(t)}\|$، داریم $s'(t)\geqslant 0$. از طرفی با توجه به اینکه C هموار است داریم $s'(t)\neq 0$، پس برای هر t، $s'(t)>0$. در نتیجه s بر حسب t تابعی اکیداً صعودی است یعنی وارون‌پذیر است. فرض کنید $t=t(s)$ وارون $s(t)$ باشد. با قرار دادن $t(s)$ به جای t در معادله C می‌توان خم C را بر حسب طول قوس (s) نوشت:

$$\vec{R(s)}=\vec{r(t(s))}=(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s))).$$

مثال. نمایش پارامتری $C:\vec{r(t)}=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$ را بر حسب طول قوس از نقطه نظیر $t=0$ بنویسید.

مثال. نمایش پارامتری خط $l:\vec{r(t)}=(at+x_0, bt+y_0, ct+z_0)$ را بر حسب طول قوس از نقطه نظیر $t=0$ بنویسید.

نکته. فرض کنیم $\vec{R(s)}=\vec{r(t(s))}$ نمایش پارامتری خم C بر حسب طول قوس باشد. در این صورت برای هر s داریم $\|\vec{R'(s)}\|=1$. بنابراین $\vec{T(s)}=\vec{R'(s)}$.

انحنا (خمیدگی)

فرض کنید $C: \vec{r}(t)$ یک خم پارامتری و $\vec{R}(s)$ نمایش پارامتری آن برحسب طول قوس باشد. برای هر s، خمیدگی C در نقطه نظیر s را به شکل $K(s)=\|\vec{R}''(s)\|$ تعریف می‌کنیم.

مثال. نشان دهید خمیدگی یک خط راست در هر نقطه برابر صفر است.

مثال. نشان دهید خمیدگی یک دایره در تمام نقاط برابر با عکس شعاع آن است.

خمیدگی برحسب پارامتر دلخواه

اگر $C: \vec{r}(t)$ یک خم پارامتری هموار باشد، آنگاه

$$K(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

مثال. خم $C: \vec{r}(t) = (t\cos t+1, t\sin t-1, t^2)$ مفروض است. خمیدگی C را در نقطه $P=(1,-1,0)$ بیابید.

مثال. فرض کنید $y=f(x)$ یک تابع حقیقی است که بر بازه I دوبار مشتق‌پذیر است. نشان دهید برای هر $t\in I$، انحنای نمودار تابع $y=f(x)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال. نقاطی از خم $y=e^x$ را بیابید که دارای بیشترین مقدار خمیدگی باشند.

فصل سوم : رویه ها در فضای $\mathbb{R}^3$

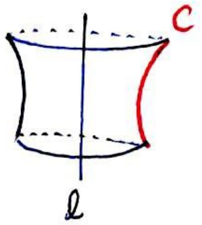
یک رویه S در فضای $\mathbb{R}^3$ مکان هندسی نقاطی مانند (x,y,z) در فضاست که در یک رابطه ضمنی مثل $F(x,y,z)=0$ صدق کند.

رابطه $F(x,y,z)=0$ را معادله رویه S نامیده و می‌نویسیم $S: F(x,y,z)=0$

انواع رویه ها

۱) رویه های دوار

فرض کنید C یک خم مسطح، l یک خط در فضا و π یک صفحه شامل C و l است. با دوران C حول l یک رویه در فضا حاصل می‌شود که آن را یک رویه دوار می‌نامیم. خم C را منحنی مولد و l را محور دوران می‌نامیم.



حالات خاص: وقتی l یکی از محورهای مختصات و صفحه π یکی از صفحات مختصات باشد، حالات زیر به دست می‌آید

$C: f(x,y)=0$ در صفحه xy:
- $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ دوران حول محور x
- $f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$ دوران حول محور y

$C: f(z,x)=0$ در صفحه zx:
- $f(z, \pm\sqrt{x^2+y^2})=0$ دوران حول محور z
- $f(\pm\sqrt{y^2+z^2}, x)=0$ دوران حول محور x

$C: f(y,z)=0$ در صفحه yz:
- $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$ دوران حول محور y
- $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$ دوران حول محور z

مثال. معادله حاصل از دوران خم $C: 4x^2+y^2=1$ را حول محورهای x و y بنویسید.

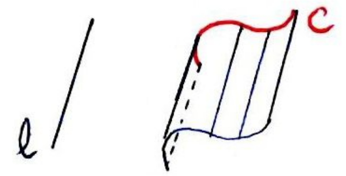
مثال. معادله سطح حاصل از دوران خم $z=2x$ $(x>0)$ را حول محور x بنویسید.

مثال. رویه $y=x^2+z^2$ را توصیف کنید.

مثال. رویه $x=\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}$ را توصیف کنید

۲) رویه های استوانه ای

فرض کنید c یک خم مسطح در صفحه π، و l خطی است که با صفحه π موازی نیست. مکان هندسی نقاط از فضا که روی خطوط گذرا از c به موازات l قرار دارند را یک رویه استوانه ای می نامیم. خم c را منحنی هادی و خط l را مولد استوانه می نامیم.



در حالت خاص که l یکی از محورهای مختصات، و c در صفحه عمود بر l باشد (یکی از صفحات اصلی) معادله به یکی از صورت های $f(x,y)=0$، $f(y,z)=0$ یا $f(z,x)=0$ است.

مثال. استوانه های زیر را رسم کنید.

۱) $x^2+4y^2=1$

۲) $x^2+y^2=2y$

۳) $z=3-y^2$

۴) $y=x^2$ $(x>0)$

۳) رویه‌های درجه دوم

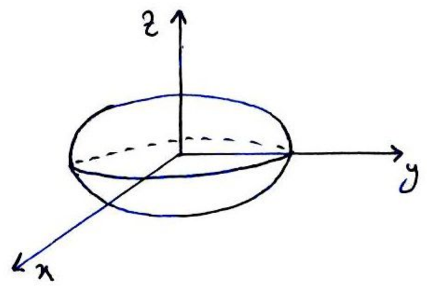
یک رویه درجه دوم در فضای $\mathbb{R}^3$ رویه‌ای است با معادله زیر

$$S: a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5yz + a_6xz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0$$

که در آن a_i ها اعداد حقیقی بوده و حداقل یکی از $a_1, \dots, a_6$ ناصفر است. مهم‌ترین رویه‌های درجه دوم عبارتند از

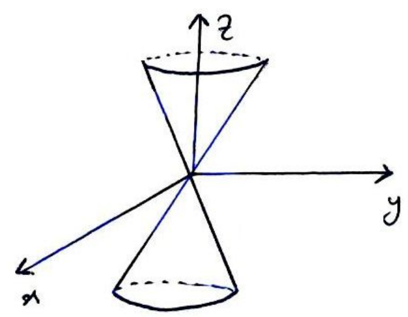
۱) بیضی‌گون: یک بیضی‌گون به مرکز (x_0, y_0, z_0) و شعاع‌های a، b، c دارای معادله زیر است.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$



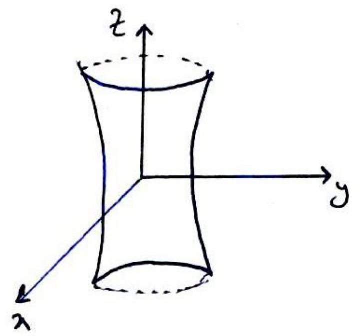
۲) مخروط بیضوی: یک مخروط بیضوی با مرکز تقارن (x_0, y_0, z_0) دارای معادله زیر است:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$$



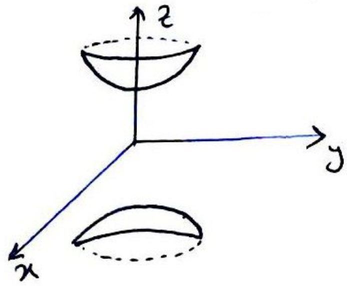
۳) هذلولی‌گون یکپارچه: رویه‌ای است با معادله زیر

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$



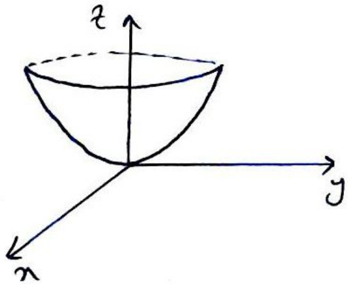
④ هذلولی‌گون دو پارچه: رویه‌ای است با معادله زیر:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$



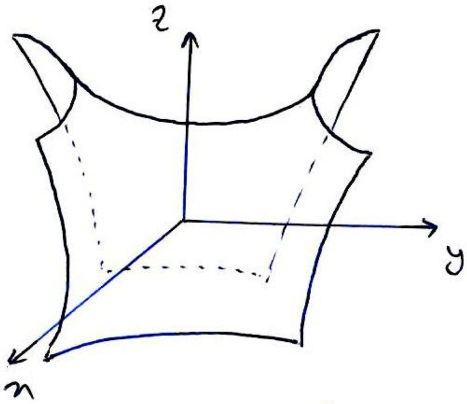
⑤ سهمی‌گون بیضوی: رویه‌ای است با معادله زیر:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{z-z_0}{c}$$



⑥ سهمی‌گون هذلولی: رویه‌ای است با معادله زیر:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{z-z_0}{c}$$



مثال. رویه‌های زیر را رسم کنید

۱) $z=\sqrt{\frac{x^2}{3}+y^2}$

۲) $z=2-\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}$

۳) $x=4-y^2-3z^2$

۴) $y=\sqrt{2-x^2-3z^2}$

۵) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$

۶) $y=\sqrt{x^2+2z^2+1}$

۷) $9x^2+y^2-9z^2-54x-4y-54z+4=0$

فصل چهارم: توابع چندمتغیره

منظور از یک تابع n-متغیره تابعی است مانند $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ که به هر $(x_1, \dots, x_n) \in D$ عنصری مانند $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ نسبت می‌دهد. مجموعه D دامنه f نامیده می‌شود.

مثال. دامنه تعریف توابع زیر را به دست آورید:

۱) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}} + \sqrt{x^2+y^2-1}$

۲) $g(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$

تعریف. فرض کنید $f: D \to \mathbb{R}$ تابعی n-متغیره باشد. نمودار f به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$G_f = \{ (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D \}.$$

مثال. نمودار توابع زیر را توصیف کنید.

۱) $f(x,y) = x^2+y^2+1$

۲) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

حد و پیوستگی

تعریف. فرض کنید f تابعی n-متغیره باشد. می‌گوییم f در نقطه $P=(a_1, \dots, a_n)$ دارای حد l است هرگاه

الف) هر همسایگی محذوف P شامل نقطه‌ای از دامنه f باشد.

ب) با نزدیک شدن $X=(x_1, \dots, x_n)$ به P، مقدار $f(X)$ به l نزدیک شود.

مثال. حد توابع داده شده را بیابید.

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x^3-y^3+3xy)$

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sin(x^2y-1)}{x^2y-1}$

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}$

تعریف. می‌گوییم تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه P کراندار است هرگاه عدد M وجود داشته باشد به طوری که برای هر نقطه X در این همسایگی داشته باشیم $|f(X)| \leq M$.

مثال. نشان دهید توابع زیر در یک همسایگی محذوف نقطه داده شده کراندارند.

۱) $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)$ در $P=(0,0)$.

۲) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ در $P=(0,0)$.

۳) $f(x,y)=\dfrac{x+y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$ در $P=(0,1)$.

۴) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+\sin^2 y}}{|x|+|\sin y|}$ در $P=(0,0)$.

قضیه. فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه P کراندار و تابع g در P حدی برابر صفر داشته باشد. در این صورت

$$\lim_{X\to P} f(X)g(X)=0.$$

مثال. حدود زیر را حساب کنید

۱) $\lim_{(x,y)\to(-1,0)} (x+1)\sin\frac{y}{(x+1)^2+y^2}$

۲) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sqrt{x^4-y^4z^4}}{|x|+|yz|}$

حد روی مسیر و عدم وجود حد

فرض کنید $C:\vec{r(t)}=(x(t),y(t),z(t))$ $(a<t<b)$ یک خم پیوسته و $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای روی C باشد،
یعنی $a<t_0<b$ وجود دارد که $\vec{r(t_0)}=P_0$. فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ روی ناحیه‌ای شامل خم C تعریف شده است. حد
$\lim_{t\to t_0} f(x(t),y(t),z(t))$ را در صورت وجود، حد f در P_0 روی C نامیده و آن را با $\lim_{(x,y,z)\xrightarrow{C}P} f(x,y,z)$ نمایش می‌دهیم.

مثال. حد تابع $f(x,y,z)=\frac{xy}{x^2+yz}$ را در مبدأ روی مسیر $C:\vec{r(t)}=(t,t^2,t)$ بدست آورید.

قضیه. فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه P_0 مانند N تعریف شده است. در این صورت $\lim_{(x,y,z)\to P_0} f(x,y,z)=l$ اگر و تنها اگر
برای هر مسیر C در N گذرا از نقطه P_0 داشته باشیم $\lim_{(x,y,z)\xrightarrow{C}P_0} f(x,y,z)=l$.

نتیجه. اگر دو مسیر C_1 ، C_2 شامل P_0 وجود داشته باشد که $\lim_{(x,y,z)\xrightarrow{C_1}P_0} f(x,y,z)\neq\lim_{(x,y,z)\xrightarrow{C_2}P_0} f(x,y,z)$ آنگاه f در P_0 حد ندارد.

مثال. نشان دهید $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ وجود ندارد.

مثال. نشان دهید $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^\alpha y^\beta}{x^{2\alpha}+y^{2\beta}}$ وجود ندارد $(\alpha,\beta>0)$.

مثال. نشان دهید $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{(x+y^3)^3}$ وجود ندارد.

مثال. نشان دهید $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\sin^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)}$ وجود ندارد.

تعریف. فرض کنید تابع n متغیره f در یک همسایگی نقطه P_0 تعریف شده باشد. می‌گوییم f در P_0 پیوسته است هرگاه

$$\lim_{X \to P_0} f(X) = f(P_0).$$

مثال. پیوستگی تابع $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x \sin^3 y}{tg^2(x^2+y^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ را در مبدأ بررسی کنید.

مثال. پیوستگی تابع زیر را در مبدأ بررسی کنید.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^2 z}{x^2+y^2+z^2} + z \sin \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

مشتقات جزئی مرتبه اول

فرض کنید تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ در یک همسایگی از نقطه $P_0 = (a_1, \dots, a_n)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم f نسبت به x_i در P مشتق جزئی دارد هرگاه $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$ موجود باشد. در این حالت این حد را با $f_{x_i}(P)$ یا $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ نشان داده و آن را مشتق جزئی f نسبت به x_i می‌نامیم.

مثال. مشتقات جزئی تابع $f(x,y) = x^2 + y$ را در مبدأ به دست آورید.

نکته. برای محاسبه مشتق جزئی تابع f نسبت به x_i همه متغیرها به جز x_i را ثابت فرض کرده و از f نسبت به x_i با قواعد معمول مشتق‌گیری مشتق می‌گیریم.

مثال. مشتقات جزئی تابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

مشتقات جزئی مرتبه بالاتر

اگر تابع nـمتغیره f نسبت به x_i مشتق جزئی داشته باشد، تابع nـمتغیره f_{x_i} حاصل می‌شود. اگر f_{x_i} نسبت به x_j مشتق جزئی داشته باشد آن را با $f_{x_i x_j}$ یا $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ نمایش می‌دهیم.

مثال. در تابع مثال قبل، حاصل f_{xy} و f_{yy} را بیابید.

قضیه. فرض کنید تابع f و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول آن در یک همسایگی از نقطه P پیوسته باشند. به علاوه، فرض کنید توابع $f_{x_i x_j}$ و $f_{x_j x_i}$ در P پیوسته هستند. در این صورت $f_{x_i x_j}(P) = f_{x_j x_i}(P)$.

مثال. برای تابع
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
نشان دهید $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

مشتق‌پذیری

می‌گوییم تابع nـمتغیره f در نقطه $P = (a_1, \dots, a_n)$ مشتق‌پذیر است هرگاه

$$\lim_{h \to (0,0,\dots,0)} \frac{f(P+h) - f(P) - h_1 f_{x_1}(P) - \dots - h_n f_{x_n}(P)}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0,$$

که در آن $h = (h_1, \dots, h_n)$.

قضیه. اگر تابع nـمتغیره f در P مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در P پیوسته است. همچنین تمام مشتقات جزئی f در P وجود دارند.

قضیه. اگر تمام مشتقات جزئی تابع f در یک همسایگی از نقطه P موجود و پیوسته باشند، آنگاه f در P مشتق‌پذیر است.

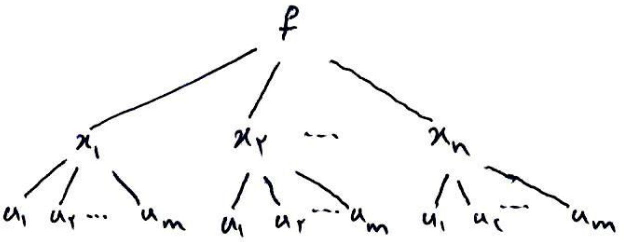
قضیه. فرض کنید توابع nـمتغیره f و g در نقطه P مشتق‌پذیر باشند. در این صورت توابع $f \pm g$، fg و λf (λ عدد حقیقی) نیز در P مشتق‌پذیرند. به علاوه، اگر $g(P) \neq 0$ آنگاه $\frac{f}{g}$ نیز در P مشتق‌پذیر است.

قاعده زنجیره‌ای

فرض کنید توابع $x_1 = x_1(u_1,\dots,u_m)$ و ... و $x_n = x_n(u_1,\dots,u_m)$ در نقطه U مشتق‌پذیرند. به علاوه فرض کنید تابع $f = f(x_1,\dots,x_n)$ در یک همسایگی نقطه $P=(x_1(U),\dots,x_n(U))$ تعریف شده و در P مشتق‌پذیر است.

در این صورت تابع $g(u_1,\dots,u_m) = f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m))$ در U مشتق‌پذیر است و برای هر $1\le i\le m$ داریم

$$g_{u_i}(U) = f_{x_1}(P)\, x_{1_{u_i}}(U) + \dots + f_{x_n}(P)\, x_{n_{u_i}}(U).$$



مثال. فرض کنید $f(x,y,z) = xz + y^2$، $x = u + v^2$، $y = uv$ و $z = u+v$. مطلوب است محاسبه f_u و f_v.

مثال. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است. نشان دهید تابع $z = f\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ در رابطه $xz_x + yz_y = 0$ صدق می‌کند.

مثال. فرض کنید $g(x,y) = f(x+2y) + f(x-2y)$ که در آن f تابعی مشتق‌پذیر است. نشان دهید $g_{yy} - 4g_{xx} = 0$.

مثال. فرض کنید $f(x,y)$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته است و $f_{xx}+f_{yy} = \frac{1}{2}$. نشان دهید تابع $z = f(x+y, x-y)$ در رابطه $z_{xx}+z_{yy} = 1$ صدق می‌کند.

مشتق ضمنی

فرض کنید $f(x_1,\dots,x_n)$ تابعی با مشتقات جزئی پیوسته باشد و x_n به عنوان تابعی از متغیرهای $x_1,\dots,x_{n-1}$ در رابطه $f(x_1,\dots,x_n)=0$ صدق کند. اگر $\frac{\partial f}{\partial x_n}\neq 0$، آنگاه برای هر $1\le i\le n-1$ داریم:

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = -\frac{f_{x_i}}{f_{x_n}}$$

مثال. فرض کنید $z=z(x,y)$ تابعی است مشتق‌پذیر که در رابطهٔ ضمنی $(x^2+1)y-2xz+ye^{z-2}=2$ صدق می‌کند. مطلوبست

$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$ و $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$.

مثال. تابع $z=f(x,y)$ به‌طور ضمنی توسط معادله $\sin(x+z)+\sin(y+z)=0$ تعریف شده است. نشان دهید

$z_x+z_y=-1$.

مثال. فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و z تابعی مشتق‌پذیر از متغیرهای x و y که در رابطه $f\left(\frac{z}{x},\frac{z}{y}\right)=0$

صدق می‌کند. نشان دهید $xz_x+yz_y=z$.

مثال. فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته است و $f_x+f_y\neq 0$. فرض کنید z به عنوان تابعی از

x و y در رابطه $x-y=f(z-x,z-y)$ صدق می‌کند. نشان دهید $z_x+z_y=1$.

بردار گرادیان

فرض کنید مشتقات جزئی تابع n-متغیره f در نقطه P موجود باشد. بردار $(f_{x_1}(P),\dots,f_{x_n}(P))$ را گرادیان f در P نامیده و با

$\overrightarrow{\nabla f(P)}$ نمایش می‌دهیم.

نکته. فرض کنید $S:F(x,y,z)=0$ یک رویه هموار در فضا باشد. در این صورت $\overrightarrow{\nabla F(P)}$ بر S در نقطهٔ P عمود است.

مثال. رویه $S: xy-2yz+3xz=1$ مفروض است. معادله خط عمود و صفحه مماس بر S را در نقطهٔ $P=(1,2,1)$ واقع بر S بنویسید.

مثال. تابع $f(x,y)=x^2+y^2-3y$ مفروض است. معادله صفحه مماس بر نمودار f را در نقطه نظیر $P=(1,2)$ بنویسید.

مثال. رویه‌های $S_1: x^3+y-z^2=2$ و $S_2: z^2+zy=3$ مفروضند. معادله خط مماس بر خم C حاصل از تقاطع این

دو رویه را در نقطه $P=(1,2,1)$ بنویسید.

مشتق سویی (جهتی)

فرض کنید تابع $f(x_1,\dots,x_n)$ در یک همسایگی نقطهٔ $P=(a_1,\dots,a_n)$ تعریف شده و $\vec{u}=(u_1,\dots,u_n)$ یک بردار یکه در $\mathbb{R}^n$ است.

می‌گوییم تابع f در نقطهٔ P و در جهت $\vec{u}$ مشتق‌پذیر است هرگاه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(P+h\vec{u})-f(P)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+hu_1,\dots,a_n+hu_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h}$$

موجود باشد. در این حالت مقدار حد فوق را مشتق سویی f در P در جهت $\vec{u}$ نامیده و آن را با $D_{\vec{u}}f(P)$ نمایش می‌دهیم.

مثال. مشتق سویی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را در مبدأ و در جهت بردار یکهٔ $\vec{u}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ بیابید.

قضیه. فرض کنید تابع $f(x_1,\dots,x_n)$ در نقطهٔ P مشتق‌پذیر و $\vec{u}$ یک بردار یکه در $\mathbb{R}^n$ است. در این صورت مشتق سویی f در نقطهٔ P در جهت $\vec{u}$ موجود است و $D_{\vec{u}}f(P)=\vec{\nabla f}(P)\cdot\vec{u}$.

نتیجه. بیشترین مقدار $D_{\vec{u}}f(P)$ وقتی اتفاق می‌افتد که $\vec{u}$ و $\vec{\nabla f}(P)$ هم‌جهت باشند و کمترین مقدار وقتی است که این دو بردار در خلاف جهت هم باشند.

مثال. فرض کنید دما در نقطهٔ (x,y) از یک صفحهٔ فلزی با رابطهٔ $T(x,y)=x^2+\sinh(xy)$ داده شده است. جهتی را تعیین کنید که با حرکت در آن جهت در نقطهٔ $P=(1,0)$ دما با بیشترین سرعت ممکن افزایش یابد.

مثال. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) مشتق سویی f را در مبدأ و در جهت بردار $\vec{u}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ بیابید.

ب) مقدار $\vec{\nabla f}(0,0)\cdot\vec{u}$ را محاسبه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اکسترمم های توابع چندمتغیره

تعریف. فرض کنید $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. نقطه $P \in U$ را یک نقطه بحرانی f می‌نامیم هرگاه $\vec{\nabla} f(P)$ موجود نباشد یا $\vec{\nabla} f(P) = \vec{0}$.

تعریف. فرض کنید $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع و P یک نقطه از U باشد.

الف) می‌گوییم f در P یک ماکسیمم نسبی است هرگاه یک همسایگی N از P در U وجود داشته باشد به طوری که برای هر $X \in N$، $f(X) \leq f(P)$. در این حالت P را یک نقطه ماکسیمم نسبی و $f(P)$ را یک مقدار ماکسیمم نسبی می‌نامیم. مینیمم نسبی به همین صورت تعریف می‌شود.

ب) نقطه P را یک نقطه زینی برای f می‌نامیم هرگاه P یک نقطه بحرانی f باشد و دو مسیر C_1 و C_2 گذرا از P در U وجود داشته باشند که برای هر $X \in C_1$ که $X \neq P$ داشته باشیم $f(X) < f(P)$ و برای هر $X \in C_2$ که $X \neq P$ داشته باشیم $f(X) > f(P)$.

ج) می‌گوییم f در P یک ماکسیمم مطلق دارد هرگاه برای هر $X \in U$، $f(X) \leq f(P)$.

قضیه. فرض کنید $U \subseteq \mathbb{R}^n$ یک ناحیه و $P \in U$ یک اکسترمم موضعی برای f باشد. در این صورت P یک نقطه بحرانی f است.

قضیه (آزمون مشتق دوم برای توابع دو متغیره) فرض کنید تابع $f(x,y)$ در یک ناحیه $U \subseteq \mathbb{R}^2$ شامل نقطه P دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته است و $\vec{\nabla} f(P) = \vec{0}$. قرار دهید $A = f_{xx}(P)$، $B = f_{xy}(P)$، $C = f_{yy}(P)$ و $\Delta = AC - B^2$.

الف) اگر $\Delta > 0$ و $A > 0$، آنگاه P یک نقطه مینیمم نسبی f است.

ب) اگر $\Delta > 0$ و $A < 0$، آنگاه P یک نقطه ماکسیمم نسبی f است.

ج) اگر $\Delta < 0$، آنگاه P یک نقطه زینی f است.

د) اگر $\Delta = 0$، آزمون بی‌نتیجه است.

مثال. نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=4x^3-3xy^2+y^2+y$ را یافته و نوع آنها را تعیین کنید.

مثال. نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^3-2y^3+2x^2+6y+3$ را یافته و نوع آنها را تعیین کنید.

قضیه. فرض کنید D مجموعه‌ای بسته و کراندار در $\mathbb{R}^n$ و $f: D\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. در این صورت f بر D دارای مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق است.

مثال. مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x,y)=2x^2+y^2-y-1$ را روی ناحیه $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ بیابید.

مثال. اکسترمم های مطلق تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$ را روی ناحیه $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-4x+3\leq 0\}$ بیابید.

اکسترمم های مشروط

قضیه. فرض کنید $S: g(x,y,z)=0$ یک رویه هموار در فضا بوده و تابع f را روی رویه مشتق پذیر باشد. به علاوه فرض کنید تابع f در نقطه $P\in S$ دارای اکسترمم مشروط است. در این صورت $\nabla f(P)\parallel\nabla g(P)$، یعنی $\lambda\neq 0$ وجود دارد که $\nabla f(P)=\lambda\nabla g(P)$.

مثال. اکسترمم های تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را تحت شرط $2x^2+3y^2+z^2=1$ بدست آورید.

مثال. نزدیکترین نقاط رویه $z=xy+1$ به مبدأ را بیابید.

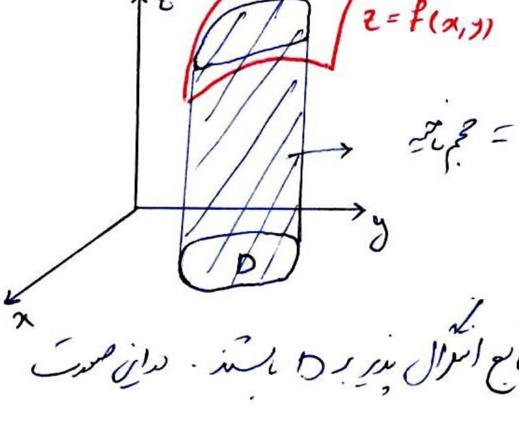
مثال. مقادیر اکسترمم های مطلق تابع $f(x,y)=2x^2+y^2-y-1$ را روی ناحیه $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ بیابید.

فصل پنجم — انتگرال دوگانه

به یاد آورید برای تعریف انتگرال تابع حقیقی $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ یعنی $\int_a^b f(x)dx$ ، از افراز $[a,b]$ به بازه های کوچکتر و مفهوم مجموع ریمان استفاده کردیم. اکنون فرض کنید $f(x,y)$ تابعی دو متغیره باشد که روی ناحیه کراندار $D\subseteq \mathbb{R}^2$ تعریف شده است. برای تعریف دقیق انتگرال دوگانه f بر D نیز می‌توانیم از افراز D به مستطیل های کوچک و مجموع ریمان استفاده کنیم. با توجه به اینکه هدف اصلی ما نحوه محاسبه انتگرال دوگانه به همراه تعبیر هندسی آن است، از بیان تعریف دقیق صرف نظر نموده و در ادامه پس از معرفی نماد، نحوه محاسبه آن را شرح می‌دهیم.

فرض کنید $D\subseteq \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای کراندار و $f(x,y)$ تابعی دو متغیره است که روی D تعریف شده است. انتگرال تابع $f(x,y)$ روی D را با نماد $\iint_D f(x,y)\,dA$ نشان داده و آن را انتگرال دوگانه f بر D می‌نامیم. توجه کنید که dA برابر است با $dxdy$ یا $dydx$.

تذکر. همان طور که انتگرال یک تابع حقیقی یک متغیره نامنفی برابر مساحت محصور به نمودار تابع و محور x ها است، انتگرال دوگانه تابع نامنفی $f(x,y)$ بر ناحیه $D\subseteq \mathbb{R}^2$ نیز برابر با حجم قسمتی از ناحیه محصور به نمودار تابع $f(x,y)$ و صفحه xy است که بالای ناحیه D قرار دارد.



$$\text{حجم ناحیه} = \iint_D f(x,y)\,dA$$

قضیه. فرض کنید $D\subseteq \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای کراندار و $f,g: D\to \mathbb{R}$ دو تابع انتگرال پذیر بر D باشند. در این صورت

۱) برای هر عدد حقیقی α ، تابع $\alpha f+g$ نیز بر D انتگرال پذیر است و $\iint_D(\alpha f+g)\,dA=\alpha\iint_D f\,dA+\iint_D g\,dA$

۲) اگر برای هر $(x,y)\in D$ ، $f(x,y)\le g(x,y)$ ، آنگاه $\iint_D f\,dA \le \iint_D g\,dA$.

۳) تابع $|f|$ بر D انتگرال‌پذیر است و $\left|\iint_D f\,dA\right| \le \iint_D |f|\,dA$.

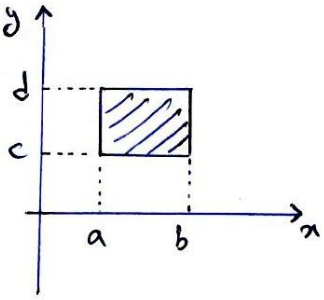
۴) اگر $D=D_1\cup\dots\cup D_n$ و D_iها حداکثر در نقاط مرزی اشتراک داشته باشند، آنگاه $\iint_D f\,dA=\iint_{D_1} f\,dA+\dots+\iint_{D_n} f\,dA$

۵) مساحت ناحیه D برابر است با $\iint_D 1\,dA$.

محاسبه انتگرال‌های دوگانه

۱) نواحی مستطیلی

منظور از یک ناحیه مستطیلی، ناحیه‌ای به شکل $[a,b]\times[c,d]$ در صفحه است:



نواحی مستطیلی ساده‌ترین نواحی برای محاسبه انتگرال دوگانه هستند.

قضیه (فوبینی). فرض کنید تابع f بر ناحیه مستطیلی $D=[a,b]\times[c,d]$ انتگرال‌پذیر است. در این صورت

$$\iint_D f\,dA=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

بنابراین در انتگرال‌گیری روی نواحی مستطیلی ترتیب انتگرال‌گیری اهمیتی ندارد.

مثال. انتگرال تابع $f(x,y)=xy+x^3$ را روی ناحیه $D=[0,2]\times[0,1]$ حساب کنید.

مثال. انتگرال تابع $f(x,y)=\sin x+xy$ را روی ناحیه $D=[1,2]\times[-1,1]$ حساب کنید.

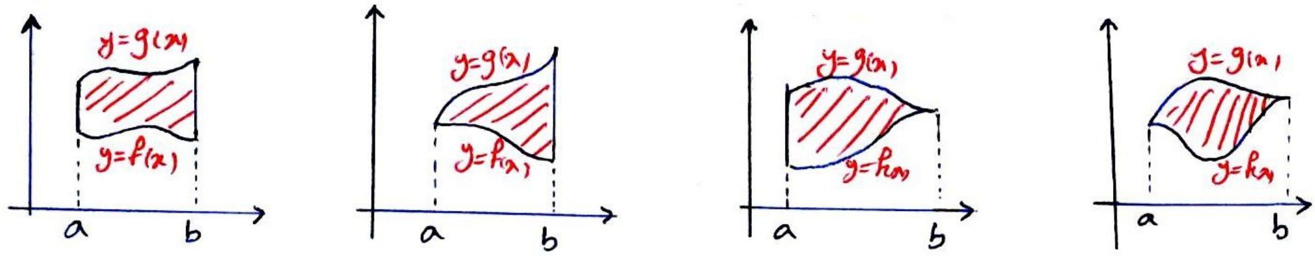
۲) نواحی ساده عمودی و افقی

فرض کنید $D\subseteq \mathbb{R}^2$ یک ناحیه کراندار است.

الف) ناحیه D را ساده عمودی می‌نامیم هرگاه بازه‌ای مانند $[a,b]$ و توابع پیوسته $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ وجود داشته باشند که

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x)\le y\le g(x)\ ,\ a\le x\le b\} \qquad (1)$$

شکل‌های زیر چند ناحیه ساده عمودی را نشان می‌دهند:



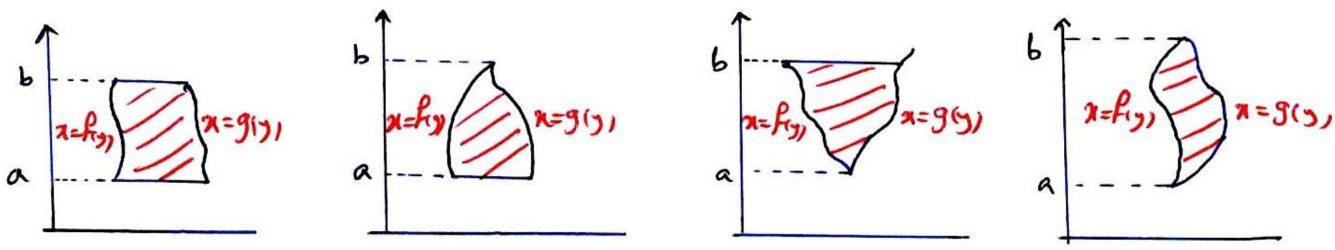
اگر D یک ناحیه ساده عمودی به شکل (۱) و $h(x,y)$ تابعی انتگرال‌پذیر بر D باشد، آنگاه

$$\iint_D h(x,y)\,dA=\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\,dy\right)dx$$

ب) ناحیه $D\subseteq\mathbb{R}^2$ را ساده افقی می‌نامیم هرگاه بازه‌ای مانند $[a,b]$ و توابع پیوسته $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ وجود داشته باشند که

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(y)\le x\le g(y)\ ,\ a\le y\le b\} \qquad (2)$$

شکل‌های زیر چند ناحیه ساده افقی را نشان می‌دهند:



اگر D یک ناحیه ساده افقی به شکل (۲) و $h(x,y)$ تابعی انتگرال‌پذیر بر D باشد، آنگاه

$$\iint_D h(x,y)\,dA=\int_a^b\left(\int_{f(y)}^{g(y)} h(x,y)\,dx\right)dy$$

تذکر. برای تعیین حدود x و y در ناحیه های ساده عمودی به شکل زیر عمل می کنیم:

۱) یک خط l موازی با محور y رسم می کنیم که از ناحیه بگذرد.

۲) نقطه ورود l به ناحیه (پایین ترین نقطه) و نقطه خروج آن (بالاترین نقطه) را تعیین نموده و در این نقاط، y را برحسب x می نویسیم.

یعنی توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را بدست می آوریم.

۳) حدود x را طوری تعیین می کنیم که کل ناحیه را در برگیرد.

برای تعیین حدود x و y در ناحیه های ساده افقی، با رسم خط افقی و نوشتن x برحسب y به شکل مشابه عمل می کنیم.

مثال. در هر مورد حدود متغیرها را در ناحیه توصیف شده بنویسید

۱) ناحیه D محصور به محورهای مختصات و خط $2x+y=3$.

۲) ناحیه D محصور به منحنی $y=x^2$، خط $y=2x$ و سمت چپ خط $x=1$.

۳) ناحیه D محصور به منحنی $y=\sqrt{x}$ و $y=\sqrt{2(x-1)}$ و محور x ها.

مثال. مطلوبست محاسبه $\iint_D x\,dA$ که D ناحیه محصور به خط $y=x$ و منحنی $y=2x-x^2$ است.

مثال. مساحت ناحیه محصور بین خط $x+y=4$ و منحنی $y=\sqrt{x+2}$ که بالای محور x قرار دارد را بیابید.

تعویض ترتیب انتگرال گیری

برخی ناحیه ها در صفحه هم ساده عمودی هستند و هم ساده افقی. در برخورد با این ناحیه ها باید توجه کرد که گاهی انتگرال گیری نسبت به یک متغیر

تحت یا حتی غیرممکن است، در حالیکه نسبت به متغیر دیگر ساده است. بنابراین برای محاسبه انتگرال روی این نواحی ممکن است

لازم باشد ترتیب انتگرال عوض شود.

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 y e^{x^3}\,dx\,dy$.

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,dy\,dx$.

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_0^2\int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$.

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

فرض کنید $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ دو تابع دو متغیره باشند. ژاکوبی u و v نسبت به x و y به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

تذکر. اگر $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ آنگاه $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$.

قضیه. فرض کنید D یک ناحیه در صفحه xy و D^* تبدیل یافته آن در صفحه uv تحت تبدیل‌های $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ است. اگر $f(x,y)$ تابعی انتگرال‌پذیر بر D باشد آنگاه $\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,dA$ که در آن $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

مثال. فرض کنید D ناحیه محدود به خطوط $x-y=0$، $x-y=2$، $x+y=0$ و $x+y=3$ است. حاصل $\iint_D (x+y)\,dA$ را بیابید.

مثال. مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $xy=1$، $xy=4$، $y^2=x$ و $y^2=ex$ واقع در ربع اول را بیابید.

مثال. فرض کنید D ناحیه محصور بین منحنی‌های $xy=2$، $xy=4$، $x^2=1+y^2$ و $x^2=9+y^2$ است. مطلوبست محاسبه $\iint_D (x^2+y^2)\,dA$.

مثال. فرض کنید D ناحیه محدود به خطوط $x+y=1$، $x+y=2$، $y=x$ و $y=3x$ است. مقدار انتگرال $\iint_D \frac{x+y}{x} e^{x+y}\,dA$ را بیابید.

دستگاه مختصات قطبی

دستگاه مختصات قطبی یک دستگاه مختصات دوبعدی است که در آن هر نقطه مانند P با یک دوتایی (r,θ) نمایش داده می‌شود که r فاصله P تا مبدأ و θ زاویه‌ای است که پاره خط واصل P به مبدأ با جهت مثبت محور x در جهت مثلثاتی می‌سازد:

توجه کنید که در شکل سمت راست، می‌توان از θ با علامت منفی، به جای $\pi<\theta<2\pi$، نیز استفاده کرد.

اگر $P=(x,y)$ آنگاه $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ، $tg\theta=\frac{y}{x}$. همچنین $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$.

مثال. معادلات $x=1$ و $x^2=4y$ را در دستگاه مختصات قطبی توصیف کنید.

تذکر. برای تعیین حدود r، θ در مختصات دکارتی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) نیم خطی با شروع از مبدأ رسم می‌کنیم که از ناحیه عبور کند.

۲) نقطه ورود و خروج این نیم خط به ناحیه را یافته و در این نقاط r را برحسب θ به دست می‌آوریم.

۳) حدود θ را چنان تعیین می‌کنیم که کل ناحیه پوشش داده شود.

مثال. فرض کنید $0<a<b$ اعدادی ثابت باشند. حدود تغییرات r و θ را برای هر یک از نواحی زیر به دست آورید.

۱) $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq a^2\}$

۲) $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq a^2,\ y\geq 0\}$

۳) $D=\{(x,y) \mid a^2\leq x^2+y^2\leq b^2,\ x,y\geq 0\}$

۱۴) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant ax\}$

۱۵) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant ay\}$

۱۶) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2ax\ ,\ x\geqslant a\}$

۱۷) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\ ,\ -\sqrt{3}x\leqslant y\leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}\}$

قضیه. فرض کنید D ناحیه‌ای در صفحه xy و D' ناحیه متناظر با D در مختصات قطبی باشد. اگر تابع $f(x,y)$ بر D انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D'} f(r\cos\theta , r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

مثال. فرض کنید D ناحیه محصور بین دایره‌های $x^2+y^2=4$ ، $x^2+y^2=2y$ در ربع اول صفحه است. مطلوب $\iint_D x\,dA$.

مثال. فرض کنید D ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=4$، بالای خط $y=1$ است. مقدار $\iint_D (x^2+y^2)\,dA$ را بیابید.

فصل ششم   انتگرال سه‌گانه

انتگرال سه‌گانه یک تابع سه متغیره را می‌توان به روشی شبیه انتگرال دوگانه، روی یک ناحیه $T \subseteq \mathbb{R}^3$ تعریف نمود. تنها تفاوت این است که ناحیه T را در شبکه‌ای از مکعب‌ها محصور و در تعریف مجموع ریمان از حجم مکعب‌ها استفاده می‌کنیم.

انتگرال سه‌گانه تابع f روی T را با نماد $\iiint_T f(x,y,z)\,dV$ نشان می‌دهیم. خواص انتگرال سه‌گانه شبیه انتگرال دوگانه است.

البته در انتگرال سه‌گانه $\iiint_T dV$ برابر با حجم T است.

محاسبه انتگرال‌های سه‌گانه

۱) نواحی مکعبی

منظور از یک ناحیه مکعبی ناحیه‌ای به شکل $T=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ در فضاست. در محاسبه انتگرال یک تابع روی یک ناحیه مکعبی (همانند انتگرال دوگانه روی ناحیه مستطیلی) ترتیب انتگرال‌گیری اهمیتی ندارد.

مثال. مطلوبست محاسبه $\iiint_T (y+z)\,dV$ که $T=[0,1]\times[0,2]\times[-1,1]$.

۲) نواحی ساده

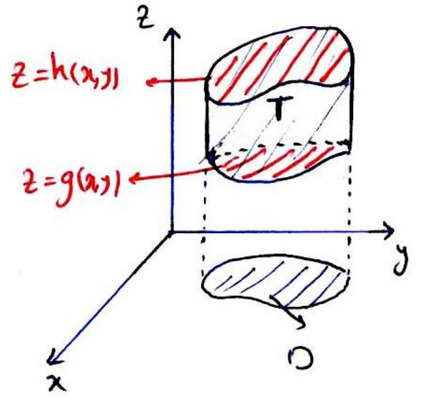
ناحیه $T\subseteq\mathbb{R}^3$ را z-ساده می‌نامیم هرگاه ناحیه‌ای مانند $D\subseteq\mathbb{R}^2$ و توابع پیوسته $g,h: D\to\mathbb{R}^3$ وجود داشته باشند که

$$T=\{(x,y,z) \mid (x,y)\in D,\ g(x,y)\le z\le h(x,y)\}$$

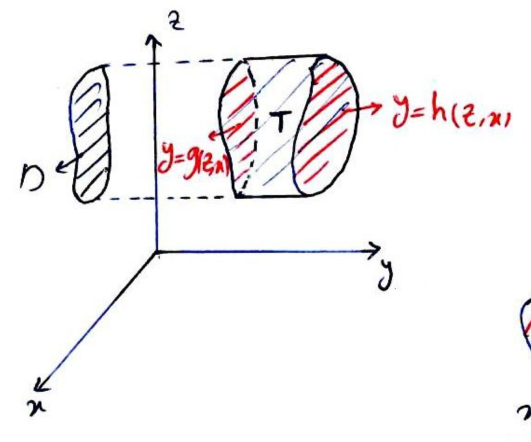
اگر $f(x,y,z)$ تابعی انتگرال‌پذیر بر T باشد آنگاه

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dA$$

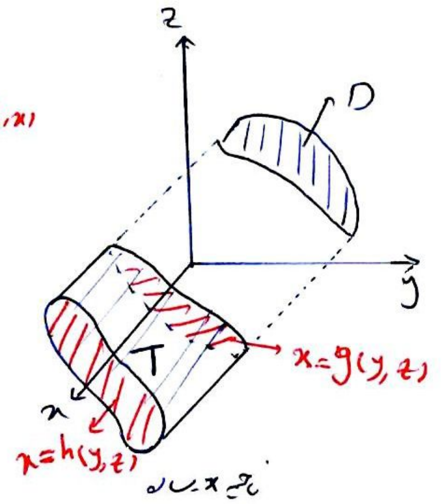
ناحیه‌های y-ساده و x-ساده نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.



ناحیه z-ساده



ناحیه y-ساده



ناحیه x-ساده

مثال. ناحیه T درون سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ در زیر صفحه $z=4$ را توصیف کنید.

مثال. مطلوبست محاسبه حجم ناحیه T محصور به صفحه $2x+y+z=4$ و صفحات مختصات واقع در $\frac{1}{8}$ اول فضا.

تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه

قضیه. فرض کنید T یک ناحیه در فضای xyz، T^* تبدیل یافته آن در فضای uvw تحت نگاشت‌های $u=u(x,y,z)$، $v=v(x,y,z)$ و $w=w(x,y,z)$ است. اگر $f(x,y,z)$ تابعی انتگرال‌پذیر بر T باشد آنگاه

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV=\iiint_{T^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dV$$

که در آن J ژاکوبین x، y، z نسبت به u، v، w است و به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

تذکر. مانند ژاکوبی در حالت دو متغیره داریم:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

مثال. حجم ناحیه محصور بین صفحات $2x-y+z=1$، $2x-y+z=2$، $x+y-z=0$، $x+y-z=3$، $x+2y-z=1$ و $x+2y-z=2$ را بیابید.

تغییر متغیر استوانه‌ای

فرض کنید $P=(x,y,z)$ نقطه‌ای دلخواه در $\mathbb{R}^3$ و (r,θ) مختصات قطبی تصویر P در صفحه xy یعنی نقطه (x,y) است.

سه‌تایی (r,θ,z) را مختصات استوانه‌ای P می‌نامیم.

قضیه. فرض کنید T ناحیه‌ای در فضای دکارتی و T' ناحیه متناظر با T در مختصات استوانه‌ای باشد. اگر تابع $f(x,y,z)$ بر T انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV=\iiint_{T'} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

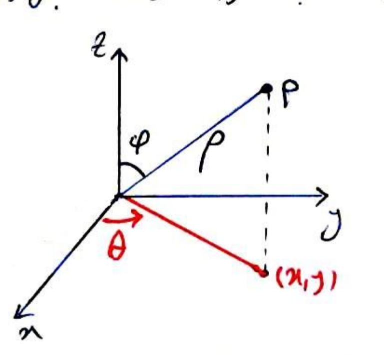
مثال. مطلوبست محاسبه $\iiint_T xz\,dV$ که T بخشی از استوانه $x^2+y^2=4$ محصور بین صفحات $z=-1$ و $z=3$ است.

مثال. فرض کنید T بخشی از ناحیه درون کره $x^2+y^2+z^2=4z$ است که در استوانه $x^2+y^2=1$ قرار دارد. حجم T را بیابید.

مثال. حجم ناحیه محصور درون سهمی‌گون $y=x^2+z^2$ و درون مخروط $y=2-\sqrt{x^2+z^2}$ را بیابید.

تغییر متغیر کروی

فرض کنید $P=(x,y,z)$ نقطه‌ای دلخواه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد. اگر فاصله P تا مبدأ مختصات را با ρ، زاویه میان پاره‌خط واصل P و مبدأ با جهت مثبت محور z را با φ و زاویه متناظر با نقطه (x,y) در مختصات قطبی را با θ نمایش دهیم، سه‌تایی (ρ,φ,θ) را مختصات کروی نقطه P می‌نامیم.



توجه کنید که $\rho\geq 0$ ، $0\leq\varphi\leq\pi$ و $0\leq\theta\leq 2\pi$ داریم.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\qquad \cos\varphi=\frac{z}{\rho}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\qquad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$$

با توجه به اینکه $0\leq\varphi\leq\pi$ ، از رابطه دوم نتیجه می‌شود $\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.

همچنین اگر ρ ، φ ، θ داده شده باشند، با روابط زیر می‌توان x ، y ، z را به دست آورد:

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\qquad z=\rho\cos\varphi$$

اکنون فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ بر ناحیه $T\subseteq \mathbb{R}^3$ انتگرال‌پذیر است. اگر T^* تصویر T در مختصات کروی باشد، آنگاه

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV=\iiint_{T^*} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

مثال. مطلوبست محاسبه $\iiint_T \cos\left((x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right)dV$ که T ناحیه درون کره $x^2+y^2+z^2=9$ است.

مثال. مطلوبست محاسبه $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ که در آن T ناحیه بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که درون کره $x^2+y^2+z^2=1$ قرار دارد.

مثال. مطلوبست محاسبه $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV$ که در آن T ناحیه درون کره $x^2+y^2+z^2=4$ است که بالای صفحه $z=1$ قرار دارد.

مثال. مطلوبست محاسبه $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV$ که در آن T ناحیه درون کره $x^2+y^2+z^2=2z$ است.

انتگرال خط

فرض کنید $C:\overrightarrow{r(t)}=(x(t),y(t),z(t))$ یک خم پارامتری هموار، و $f(x,y,z)$ تابعی باشد که بر ناحیه‌ای از فضا شامل C تعریف شده است. انتگرال زیر در صورت وجود انتگرال خط f بر C از $t=a$ تا $t=b$ نامیده و با $\int_C f\,ds$ نشان می‌دهیم

$$\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,\|\overrightarrow{r'(t)}\|\,dt$$

نکته. هرگاه C یک خم در صفحه و $f(x,y)$ تابعی دو متغیره بر ناحیه‌ای از صفحه شامل C باشد، $\int_C f\,ds$ به طور مشابه تعریف می‌شود.

در این حالت اگر f نامنفی باشد، $\int_C f\,ds$ برابر مساحت دیوار ساخته شده بر خم C با ارتفاع $z=f(x,y)$ است.

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C xy^4\,ds$ که C نیمه راست دایره $x^2+y^2=1$ است.

مثال. مطلوبست مساحت بخشی از استوانه $x^2+y^2=2y$ که بالای صفحه xy و زیر سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ قرار دارد

انتگرال سطح

فرض کنید $S: z=g(x,y)$ یک رویه هموار و کراندار در فضا، و D تصویر S در صفحه xy باشد. فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ بر ناحیه‌ای شامل رویه S پیوسته است. انتگرال سطح f بر S را با نماد $\iint_S f\,d\sigma$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\iint_S f\,d\sigma = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dA$$

مثال. مطلوبست محاسبه $\iint_S xz\,d\sigma$ که S بخشی از صفحه $x+y+z=1$ محصور در $\frac{1}{8}$ اول فضاست.

مثال. مطلوبست محاسبه $\iint_S z\,d\sigma$ که در آن سطح بسته S، مرز ناحیه محصور درون کره $x^2+y^2+z^2=4$ و بالای صفحه $z=1$ است.

مثال. فرض کنید S بخشی از رویه‌ی $y = 5 - x^2 - z^2$ محصور بین صفحات $y=1$ و $y=3$ است. مساحت S را بیابید.

مثال. فرض کنید S رویه‌ی بسته‌ای است که مرز ناحیه‌ی محصور درون استوانه‌ی $x^2+y^2=4$، صفحه‌ی $z=0$ و صفحه‌ی $z=4-y$ است. مساحت S را بیابید.

میدان‌های برداری

فرض کنید $D\subseteq \mathbb{R}^3$ ($D\subseteq \mathbb{R}^2$) ناحیه‌ای در فضا (صفحه) است. یک میدان برداری روی D تابعی است مانند $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^3\,(\mathbb{R}^2)$ که به هر $A\in D$ یک بردار $\overrightarrow{F(A)}$ در فضا (صفحه) نسبت می‌دهد.

اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری در فضا باشد آنگاه داریم $\vec{F}=(P,Q,R)$ که P، Q، R توابع سه‌متغیره هستند و مؤلفه‌های $\vec{F}$ نامیده می‌شوند. به همین ترتیب اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری در صفحه باشد، آنگاه $\vec{F}=(P,Q)$ که P، Q دو تابع دومتغیره هستند.

تعریف. میدان برداری $\vec{F}$ را روی ناحیه‌ی D پیوسته می‌نامیم هرگاه همه‌ی مؤلفه‌های $\vec{F}$ روی D پیوسته باشند. می‌گوییم $\vec{F}$ روی D هموار است هرگاه تمامی مؤلفه‌های آن بر D دارای مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته باشند.

تعریف. میدان برداری $\vec{F}$ را روی ناحیه‌ی D یک میدان گرادیان می‌نامیم هرگاه تابع چندمتغیره‌ی u روی D موجود باشد که $\vec{F}=\nabla u$. تابع u یک تابع پتانسیل برای $\vec{F}$ نامیده می‌شود.

مثال. نشان دهید میدان برداری $\vec{F}=(2x+y,\ x-3y)$ یک میدان گرادیان بر $\mathbb{R}^2$ است.

مثال. نشان دهید $\vec{F}=(y,-x)$ بر $\mathbb{R}^2$ گرادیان نیست.

مثال. نشان دهید $\vec{F}=(e^x\cos y+yz,\ xz-e^x\sin y,\ xy+z)$ یک میدان گرادیان است.

تعریف. فرض کنید $\vec{F}$ یک میدان برداری بر $D \subseteq \mathbb{R}^3$ باشد. کرل $\vec{F}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\overrightarrow{\operatorname{curl} F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = (R_y - Q_z ,\ P_z - R_x ,\ Q_x - P_y)$$

اگر $\vec{F} = (P,Q)$ یک میدان برداری در صفحه باشد، آنگاه با قرار دادن $\vec{F} = (P,Q,0)$ داریم $\overrightarrow{\operatorname{curl} F} = (0,0,\ Q_x - P_y)$.

مثال. کرل میدان $\vec{F} = (xz+y ,\ y^2z - x^2 ,\ xyz)$ را بیابید.

قضیه. فرض کنید $\vec{F} = (P,Q,R)$ یک میدان برداری هموار بر D باشد. اگر $\vec{F}$ بر D گرادیان باشد، آنگاه $\overrightarrow{\operatorname{curl} F} = \vec{0}$

یعنی $Q_x = P_y$ ، $P_z = R_x$ و $R_y = Q_z$. درحالتی که $\vec{F} = (P,Q)$ یک میدان برداری هموار در صفحه است،

اگر $\vec{F}$ گرادیان باشد آنگاه $Q_x = P_y$.

مثال. نشان دهید $\vec{F} = (e^x + y^2 ,\ -2xy + e^y)$ بر $\mathbb{R}^2$ گرادیان نیست.

مثال. نشان دهید $\vec{F} = (y + 3x^2\cos y ,\ x - x^3\sin y + y^2)$ یک میدان گرادیان است.

انتگرال خط میدانهای برداری

فرض کنید $\vec{F} = (P,Q,R)$ یک میدان برداری با مشتقات جزئی پیوسته است. فرض کنید $C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ، $a \le t \le b$ یک خم هموار است. انتگرال $\vec{F}$ روی C را با نماد $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ یا $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \Big(P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t) \Big)\,dt$$

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dy$ که C بخشی از دایره $x^2+y^2=4$ است که نقطه $A=(2,0)$

را به $B=(\sqrt{3},1)$ در جهت مثلثاتی وصل می‌کند.

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C xz\,dx - yz\,dz$ که C پاره خط واصل $A=(-1,2,0)$ به $B=(4,0,1)$ است.

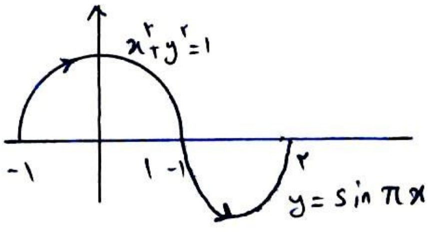
تعریف. فرض کنید $\vec F$ یک میدان برداری پیوسته روی ناحیه D باشد. می‌گوییم انتگرال خط $\vec F$ در D مستقل از مسیر است هرگاه برای هر دو مسیر C_1 و C_2 در D با نقاط آغازی یکسان و نقاط پایانی یکسان داشته باشیم

$$\int_{C_1}\vec F\cdot d\vec r=\int_{C_2}\vec F\cdot d\vec r$$

قضیه. فرض کنید $\vec F$ یک میدان برداری پیوسته روی ناحیه D باشد. انتگرال خط F در D مستقل از مسیر است اگر و تنها اگر $\vec F$ روی D یک میدان گرادیان باشد. در این حالت، اگر u یک پتانسیل برای $\vec F$ و C یک خم با نقطه ابتدایی A و نقطه انتهایی B باشد آنگاه $\int_C \vec F\cdot d\vec r = u(B)-u(A)$.

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C (yz+e^x\cos y)\,dx + (xz-e^x\sin y)\,dy + (xy+z)\,dz$ که در آن C خم حاصل از برخورد استوانه $x^2+z^2=1$ با صفحه $z=y$ در ناحیه $z\geq 0$ از نقطه $A=(-1,0,0)$ تا $B=(1,0,0)$ است.

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C (6x-5y^2+2xy^3-10)\,dx + (3x^2y^2-10xy)\,dy$ که C خم زیر است.



مثال. خم $C: \vec r(t) = \left(\cos^3(\frac{\pi}{2}t)+2\sin(\frac{\pi}{2}t),\ 2-t^2,\ \cos(2\pi t)\right)$ مفروض است. مطلوبست محاسبه

$$\int_C (2x\ln y - yz)\,dx + \left(\frac{x^2}{y}-xz\right)dy - xy\,dz$$

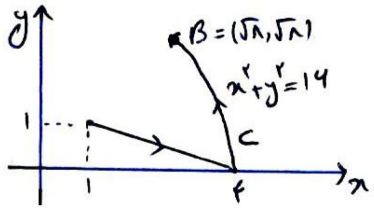
قضیه گرین. فرض کنید C یک خم ساده بسته است که در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود. فرض کنید $\vec F=(P,Q)$ یک میدان برداری است که در یک ناحیه همبند ساده شامل C هموار است. در این صورت $\oint_C \vec F\cdot d\vec r=\iint_D (Q_x-P_y)\,dA$ که در آن D ناحیه محصور درون C است.

نکته. اگر C در خلاف جهت مثلثاتی پیموده شود آنگاه $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\iint_D (Q_x - P_y)\,dA$.

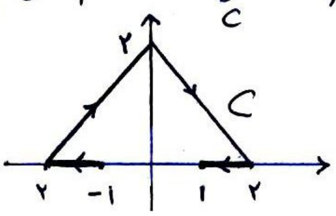
مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C (3y^2+y)\,dx + (6xy+y)\,dy$ که در آن C خم بسته متشکل از نیمه بالایی بیضی $4x^2+y^2=4$ از نقطه $A=(1,0)$ تا نقطه $B=(-1,0)$ و پاره‌خط BA است.

مثال. مطلوبست $\int_C (\cos x^2 + y^2)\,dx + (e^{-y^3}+x^2)\,dy$ که در آن C دایره $x^2+y^2=4$ است که در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود.

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ که در آن $\vec{F}(x,y)=(y-e^{x-y},\ x+e^{x-y})$ و C خم شکل زیر است:



مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C \left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$ که در آن C خم شکل زیر است،



انتگرال سطح میدان برداری

رویه S را یک رویه دوطرفه می‌نامیم هرگاه میدان برداری یکه پیوسته‌ای مانند $\vec{n}$ بر S وجود داشته باشد به طوری که برای هر $P\in S$، $\vec{n}(P)$ بر S عمود باشد.

نکته. فرض کنید $S: G(x,y,z)=0$ یک رویه هموار باشد. در این صورت $\vec{n}(P) = \pm \frac{\overrightarrow{\nabla G(P)}}{\|\nabla G(P)\|}$

تعریف. فرض کنید S یک رویه دوطرفه با بردار نرمال $\vec{n}$ و $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته بر ناحیه‌ای از فضا شامل S باشد. انتگرال $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma$ را شار عبوری میدان $\vec{F}$ گذرا از S در جهت $\vec{n}$ می‌نامیم.

مثال. شار عبوری میدان برداری $\vec{F}=(x,0,z)$ از نیمکره بالایی $S: x^2+y^2+z^2=4$ را در جهت خارج کره محاسبه کنید.

مثال. فرض کنید S بخشی از سهمی‌گون $y=x^2+z^2$ است که میان صفحات $y=0$ و $y=1$ قرار دارد. شار میدان $\vec{F}=(0,y,-z)$ گذرا از سطح S در سمت بیرون را حساب کنید.

مثال. فرض کنید S بخشی از استوانه $x^2+z^2=1$ در ناحیه $z\geq 0$ است که بین دو صفحه $y=1$ و $y=-1$ قرار دارد. شار برون‌سوی میدان $\vec{F}=((x+y)z, e^y, z^2)$ گذرا از سطح S را حساب کنید.

قضیه واگرایی (دیورژانس)

فرض کنید $\vec{F}=(P,Q,R)$ یک میدان برداری هموار است. واگرایی $\vec{F}$ به شکل $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ تعریف می‌شود.

قضیه واگرایی. فرض کنید S یک رویه بسته و قطعه‌ای هموار، T ناحیه محصور درون S و $\vec{n}$ بردار نرمال برون‌سوی S است. اگر میدان $\vec{F}$ در یک ناحیه شامل S هموار باشد آنگاه $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma=\iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\,dV$.

مثال. شار برون‌سوی میدان برداری $\vec{F}=(xy^2, yz^2, zx^2)$ گذرا از سطح کره $x^2+y^2+z^2=4$ را حساب کنید.

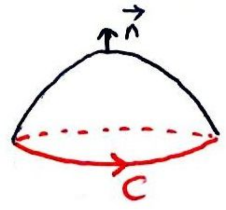
مثال. فرض کنید S سطح بسته دربرگیرنده ناحیه محصور درون استوانه $y^2+4z^2=4$ بین صفحات $x=-\pi$ ، $x=\pi$ است. مطلوبست محاسبه $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ که در آن $\vec{F}=(x^2, yx^2, 2z)$ و $\vec{n}$ بردار نرمال برون‌سوی S است.

مثال. فرض کنید T ناحیه محصور درون کره $x^2+y^2+z^2=1$ و درون مخروط $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ و S رویه بسته دربرگیرنده T باشد. شار برون‌سوی میدان برداری زیر گذرا از سطح S را محاسبه کنید،

$$\vec{F}=(y\cos z+x^3,\ e^{xz}+y^3+1,\ e^x+z^3-1).$$

قضیه استوکس

فرض کنید S یک رویه باشد که لبه (مرز) آن خم C است. اگر S جهت‌دار باشد، جهت S یک جهت حرکت روی C القا می‌کند، به این شکل که اگر با انگشت دست راست در جهت حرکت روی C قرار بگیرد آنگاه انگشت شست هم جهت با $\vec{n}$ باشد.



قضیه استوکس: فرض کنید S یک رویه هموار و جهت‌دار است که توسط یک خم مرزی هموار، ساده و بسته C با جهت مثبت احاطه شده است. اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری هموار بر یک ناحیه شامل S باشد آنگاه

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n})\, d\sigma$$

مثال. فرض کنید C منحنی حاصل از تلاقی سهمی‌گون $z=2-x^2-y^2$ با استوانه $x^2+y^2=1$ است که در جهت مثبت نسبت به بردار نرمال خارجی سهمی‌گون پیموده می‌شود. اگر $\vec{F}=(x^2, x+e^{y^2}, z)$، مطلوب است محاسبه $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

مثال. فرض کنید C خم حاصل از تلاقی نیم‌کره بالایی $x^2+y^2+z^2=2z$ و استوانه $x^2+y^2=y$ است که در جهت مثبت نسبت به بردار نرمال خارجی نیم‌کره پیموده می‌شود. کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F}=(y,0,0)$ در امتداد C را حساب کنید.